VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

PUNCTUL ÎN GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ

2. TRIPLA PROIECȚIE ORTOGONALĂ A PUNCTULUI. EPURA PUNCTULUI

2.1. CONSTRUCȚIA PROIECȚIEI PUNCTULUI SPAȚIAL ÎN IMAGINE AXONOMETRICĂ

Prin asocierea, în relație de perpendicularitate, a trei plane spațiale pe care se proiectează un punct, se obține tripla proiecție ortogonală a punctului, în sistemul paralel ortogonal (fig.2.1). Imaginea intuitivă, axonometrică, a celor trei plane: orizontal-[**H**], vertical-[**V**] şi lateral-[**L**] se numeşte triedru de proiecție.

Se consideră punctul **A** din spațiu, cunoscut ca poziție. Pentru a obține proiecțiile acestuia pe cele trei plane ortogonale, trebuie să mai cunoaştem încă un element al acestui punct, ce poate fi o coordonată a acestuia, sau una din proiecții, celelalte elemente rezultând în urma construcției grafice.

Presupunem cunoscut punctul **A**, ca poziție în spațiu şi proiecția sa pe planul orizontal [**H**], **a** (fig.2.1), situată la intersecția proiectantei coborâtă din **A** pe planul [**H**].

Din punctul **a** se duc proiectante pe planele vertical şi lateral şi la intersecția acestora cu axele de coordonate **Ox** şi **Oy** obținem punctele notate cu $\mathbf{a_x}$ şi $\mathbf{a_y}$.. Din aceste puncte se ridică proiectante în planele vertical şi lateral iar la intersecția acestora cu proiectantele duse pe aceste plane din punctul spațial **A** rezultă proiecțiile **a'**, în planul [**V**] şi **a"**, în planul [**L**]. În continuare se trasează proiectanta pe planul lateral din proiecția **a'** şi proiectanta pe planul vertical din proiecția **a"**; acestea se intersectează într-un punct situat pe axa **Oz**, notat cu $\mathbf{a_z}$.

Sintetic, această succesiune a construcției imaginii intuitive a proiecției punctului **A**, atunci când este cunoscută poziția spațială a acestuia şi proiecția sa pe planul [**H**], **a**, este următoarea (**a** fiind considerat cunoscut, se alege undeva pe proiectanta $\overline{\mathbf{Aa}}$):

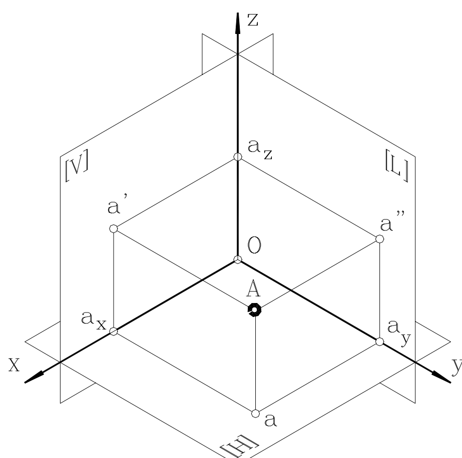


Figura 2.1

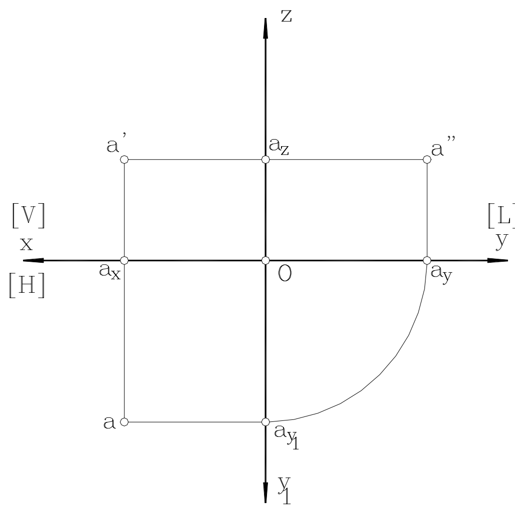


Figura 2.2

$\overline{Aa} \perp [H]$ ($\overline{Aa} \cap [H] = a$)

$a \in [H]$

$\overline{aa_x} \perp [V]$

$\overline{aa_x} \perp [H] \Rightarrow \overline{aa_x} \cap [V] = a_x \in Ox$

$\overline{aa_y} \perp [L]$

$\overline{aa_y} \perp [H] \Rightarrow \overline{aa_y} \cap [L] = a_Y \in Oy$

$\overline{a_x a'} \in [V]$

$\overline{Aa'} \perp [V] \Rightarrow \overline{a_x a'} \cap \overline{Aa'} = a' \in [V]$

$\overline{a_y a''} \in [L]$

$\overline{Aa''} \perp [L] \Rightarrow \overline{a_y a''} \cap \overline{Aa''} = a'' \in [L]$

$\overline{a' a_z} \in [V]$

$\overline{a' a_z} \perp [L] \Rightarrow \overline{a' a_z} \cap [L] = a_z \in Oz$

$\overline{a'' a_z} \in [L]$

$\overline{a'' a_z} \perp [V] \Rightarrow \overline{a'' a_z} \cap [V] = a_z \in Oz$

Punctele a_x,a_y şi a_z reprezintă coordonatele punctului spaţial **A** şi se numesc abscisa, depărtarea, respectiv cota acestuia. În cazul aplicaţiilor numerice, punctul **A(a_x,a_y,a_z)** este dat prin valorile numerice ale coordonatelor sale.

Deoarece planele de proiecţie sunt considerate infinite, acestea împart spaţiul în opt triedre de proiecţie, notate cu cifre romane: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII.

Semnul fiecărei coordonate a punctelor aflate în aceste triedre sunt prezentate în tabelul 2.1.

Tabelul 2.1

Coordonata\ Triedrul de proiecţie	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
abscisa a_x	+	+	+	+	-	-	-	-
Depărtarea a_y	+	-	-	+	+	-	-	+
cota a_z	+	+	-	-	+	+	-	-

Imaginea intuitivă, sau tripla proiecţie ortogonală a punctului **A**, permite sesizarea relaţiei spaţiu-plan ce se realizează între elementul din spaţiul tridimensional, punctul **A** şi imaginea plană a acestuia, respectiv proiecţiile **a, a'** şi **a"**. Punctul **A** este unic definit de proiecţiile sale, deoarece figura geometrică obţinută (fig.2.1) reprezintă o prismă dreptunghiulară dreaptă (caz particular un cub, atunci când $a_x = a_y = a_z$) care are elementele componente unic definite. Deci şi punctele de intersecţie ale muchiilor sale, care nu sunt altcineva decât punctul spaţial **A**, coordonatele acestuia a_x, a_y, a_z, respectiv proiecţiile **a**, **a'**, **a"** sunt unic definite.

Aşadar, prin tripla proiecţie ortogonală a punctului, se obţine o corespondenţă biunivocă între elementul spaţial şi proiecţiile sale. Pentru un punct spaţial se poate observa că sunt suficiente doar două proiecţii pentru ca acesta să fie unic definit în spaţiu.

2.2. DEFINIREA EPUREI. CONSTRUCŢIA EPUREI PUNCTULUI SPAŢIAL

Prin rabaterea planului orizontal, în sensul prezentat în figura 2.1, precum şi a planului lateral, în sensul prezentat, până la suprapunerea acestora peste planul vertical **[V]** (prin rotirea în jurul axei **Ox**, respectiv **Oz** a planelor **[H]** şi **[L]**) triedrul de proiecţie devine un plan de proiecţie, care poartă denumirea de epură. Procedând în acest mod, tripla proiecţie ortogonală a punctului devine

epura punctului (fig.2.2), în care punctul spațial este definit numai de proiecțiile acestuia. Odată cu rabaterea planelor de proiecție se rabat și elementele geometrice cuprinse în acele plane. Cu alte cuvinte, în epură elementele spațiale nu mai apar, ele rămânând în spațiu, iar în planul epurei vor fi reprezentate doar imaginile acestora, pe cele trei plane de proiecție.

Axa **Oy** din triedrul de proiecție este axă comună planelor [**H**] şi [**L**], iar după rabatere vor rezulta două axe, fiecare însoțind în rabatere planul căruia îi aparține. Axa corespunzătoare planului orizontal se notează cu $\mathbf{Oy_1}$, iar cu **Oy** axa corespunzătoare planului lateral (fig.2.2).

După cum s-a arătat, un punct spațial **A** este caracterizat de următoarele elemente geometrice: coordonatele punctului $\mathbf{a_x, a_y, a_z}$ şi proiecțiile punctului **a, a', a"**. Pentru construcția epurei (fig.2.2), ca şi în cazul construcției grafice a triplei proiecții ortogonale a punctului în imagine intuitivă (axonometrică), este necesar un număr minim de elemente dintre cele ce caracterizează punctul spațial. Presupunem cunoscute, de exemplu, punctele **a** şi **a'**, dispuse în epură pe aceeaşi proiectantă, paralelă cu axa **Oz**, care intersectează axa **Ox** în punctul $\mathbf{a_x}$. În continuare, pentru aflarea grafică a celorlalte elemente, se procedează în următoarea succesiune:

$\overline{a}\,\overline{a}_{y1} \perp Oy_1$

$\overline{a}\,\overline{a}_{y1} \cap Oy_1 = a_{y1}$

$Oa_{y1} = Oa_y$ **(se rabate punctul a_{y1} pe planul lateral [L])**

$\overline{a}'\,\overline{a}_z \perp Oz$

$\overline{a}'\,\overline{a}_z \cap Oz = a_z$

$\overline{a}_y\overline{a}'' \parallel Oz$

$\overline{a}''\,\overline{a}_z \perp Oz$

$\overline{a}_y\overline{a}'' \cap \overline{a}''\,\overline{a}_z = a''$

Punctul a cărui proiecție, în epură, am obținut-o, se situează în primul triedru de proiecție. Pentru obținerea epurei altui punct, aflat într-unul din triedrele II - VIII, procedeul este asemănător.

2.3. APLICAȚII

1. Să se explice construcția grafică a triplei proiecții ortogonale şi a epurei corespunzătoare, pentru un punct spațial **B**, atunci când se cunosc proiecțiile **b** şi **b"**, dacă punctul **B** aparține triedrului II de proiecție (**b** ∈[**H**], **b"** ∈[**L**]).

2. Pe acelaşi desen, să se reprezinte, în imagine axonometrică, două puncte **A** şi **B**, cunoscând poziția spațială a acestora (**A**, **B**) şi proiecțiile **a**, respectiv **b'**. Dacă punctul **A** se află în triedrul III şi **B** în triedrul VII, să se construiască simetricele acestor puncte față de axa Oz.

3. Punctul **A** are coordonatele $\mathbf{a_x}$, $\mathbf{a_y}$ şi $\mathbf{a_z}$, cunoscute. Dacă **A** aparține triedrului I, să se demonstreze grafic, în imagine axonometrică şi în epură, că simetricul său, **B**, față de planul lateral de proiecție, se află în triedrul V de proiecție, iar simetricul său, **M**, față de planul vertical, în triedrul II de proiecție. Dacă $\mathbf{a_x = a_y = a}$, să se demonstreze că :

$$BM = a\sqrt{2}$$

4. Să se explice prin ce se caracterizează un punct spațial care se află, succesiv, pe unul din planele de proiecție ([**H**],[**V**],[**L**]). Explicațiile vor fi însoțite de imaginea axonometrică şi epura fiecărui punct.

5. Să se reprezinte, în imagine intuitivă şi în epură, punctele **A, B, C, E, F, G, M, N** situate în triedrele I, II, III, IV, V, VI, VII VIII de proiecție.

6. Să se reprezinte axonometric şi în epură:
- punctul **A** de coordonate $\mathbf{a_x, a_y}$ şi $\mathbf{a_z}$;
- simetricele lui **A** față de [**H**], [**V**], [**L**];
- simetricele lui **A** față de axele de coordonate **Ox, Oy, Oz**;
- simetricul lui **A** față de punctul **O**.

Să se menționeze pentru fiecare punct triedrul din care acesta face parte.

MOD DE LUCRU:

Se vor respecta etapele de execuție grafică prezentate în continuare:
- se studiază semnele coordonatelor, ca urmare se menționează triedrul din care face parte punctul **A**;
- se reprezintă axonometric planele de proiecție (se vor nota planele şi axele de coordonate);
- se reprezintă cele trei coordonate, obținând cele trei proiecții **a, a', a"**:
  - **a** - la intersecția proiectantelor duse din a_x şi din a_y,
  - **a'**- la intersecția proiectantelor duse din a_x şi din a_z
  - **a"**- la intersecția; proiectantelor duse din a_y şi din a_z;
- la intersecția proiectantelor perpendiculare pe plane duse din **a, a',a"** rezultă **A**;

- se reprezintă în epură planele de proiecție (se vor nota axele de coordonate);
- se reprezintă cele trei coordonate, rezultând **a, a', a''** în acelaşi mod ca şi la construcția axonometrică.

EXEMPLU NUMERIC

Fie punctul **A** de coordonate $\mathbf{a_x} = 60$, $\mathbf{a_y} = 30$, $\mathbf{a_z} = 20$ (scara de reprezentare a acestor valori se va alege convenabil). Deoarece semnul coordonatelor este pozitiv, rezultă că acesta se află în primul triedru de proiecție (fig.2.3 şi fig.2.4): **A** (60,30,20). Simetricul lui **A**, față de planul orizontal de proiecție [**H**], va aparține triedrului IV, deoarece $\mathbf{-a_{4z} = a_z}$, şi se va nota $\mathbf{A_4}$: $\mathbf{A_4}$ (60,30,-20); simetricul față de planul vertical [**V**], se află în triedrul II deoarece $\mathbf{-a_{2y} = a_y}$ şi se notează $\mathbf{A_2}$: $\mathbf{A_2}$ (60,-30,20); simetricul față de planul lateral, [**L**], se află în triedrul V, deoarece $\mathbf{-a_{5x} = a_x}$: $\mathbf{A_5}$ (-60,30,20). În mod asemănător, se continuă rezolvarea exemplului numeric.

În tabelul 2.2 sunt prezentate mai multe variante de coordonate numerice ale punctului **A**, care pot fi utilizate în sensul extinderii aplicației grafice.

Tabelul 2.2

Nr.variantei numerice		1	2	3	4	5	6
A	a_x	-40	40	30	50	-30	-40
	a_y	50	60	-50	20	-40	20
	a_z	20	-20	30	-30	-50	50

Tabelul 2.2 (continuare)

Nr.variantei numerice		7	8	9	10	11	12
A	a_x	50	-50	20	-50	-40	20
	a_y	30	-40	-30	30	-30	-50
	a_z	40	30	-40	-40	50	-40

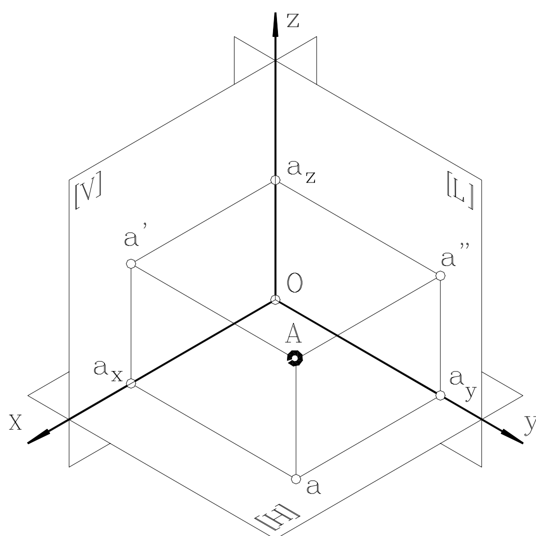


Figura 2.3

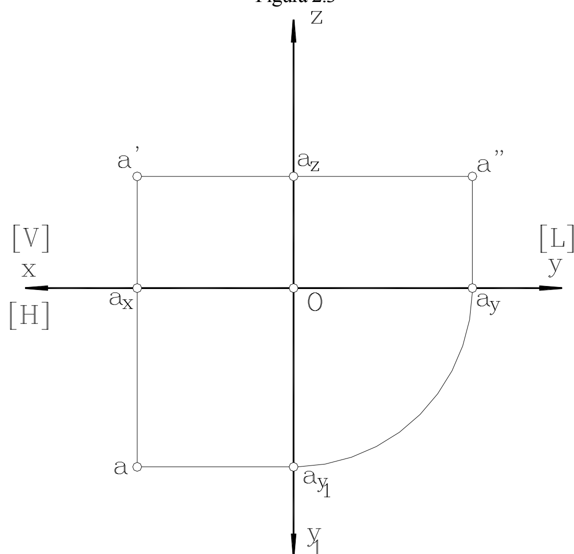
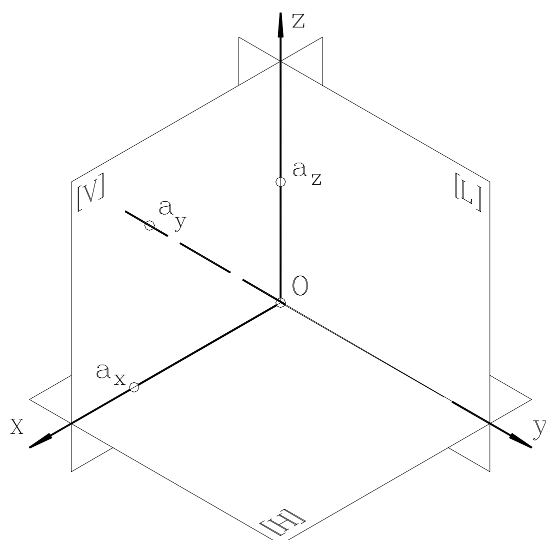
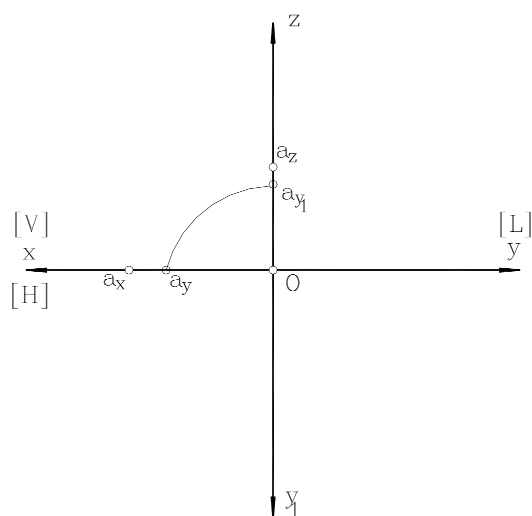


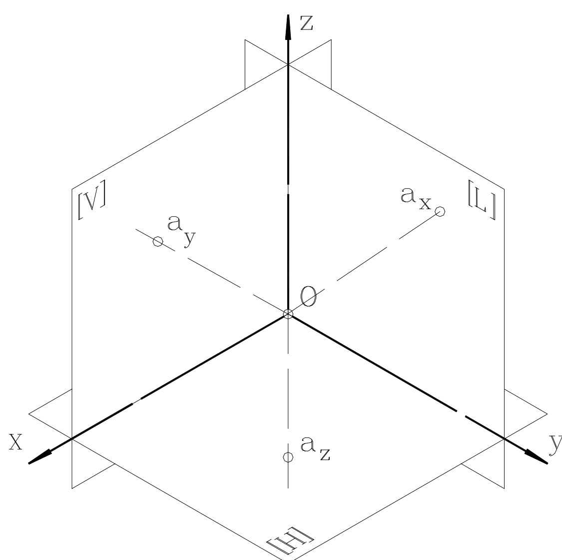
Figura 2.4

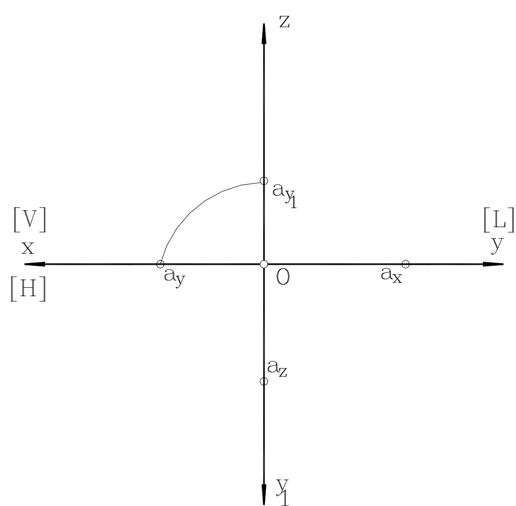
7. Să se reprezinte axonometric şi în epură:
punctul **A** de coordonate $\mathbf{a_x}$, $\mathbf{a_y}$ şi $\mathbf{a_z}$;



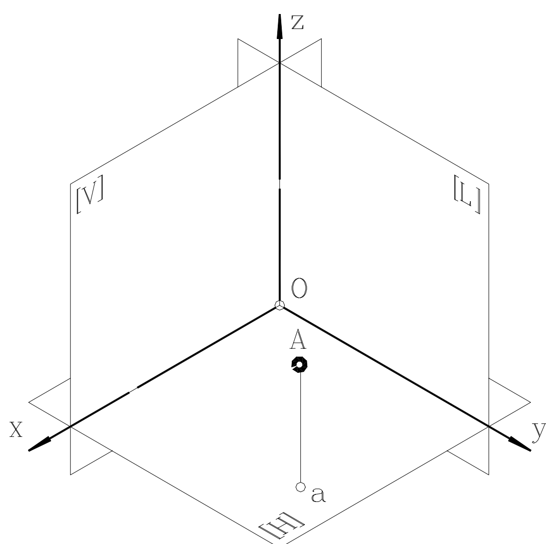


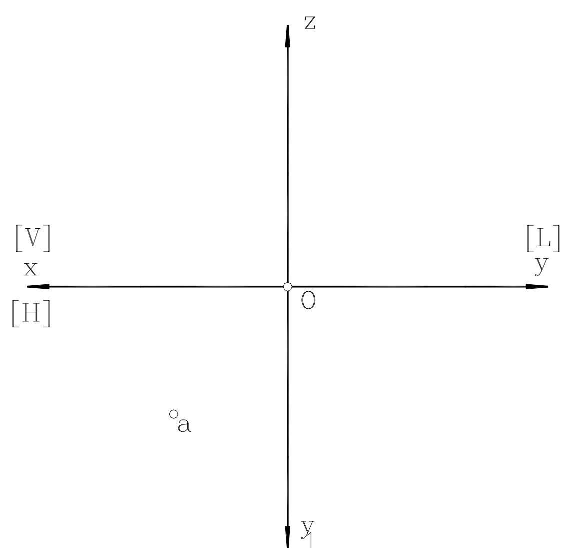
8. Să se reprezinte axonometric şi în epură:
punctul **A** de coordonate $\mathbf{a_x}$, $\mathbf{a_y}$ şi $\mathbf{a_z}$;





9. Să se reprezinte axonometric şi în epură:
punctul **A** , cunoscând proiecţia pe planul H, a, a acestuia.




z
[V]
x
[H]
[L]
y
O
a
y
1